แผนแบบการทดลองจตุรัสละติน

(Latin Squares Design)

แผนแบบการทดลองจตุรัสละติน

- มีชื่อย่อว่า LS หรือ LTD
- เหมาะสำหรับหน่วยทดลองที่มีความผันแปร 2 แหล่ง
- จัดทรีทเมนต์ในบล๊อคออกเป็น 2 ทาง คือ แถวและสดมภ์
- มีจำนวนแถว สดมภ์ และทรีทเมนต์เท่ากัน
- แต่ละบล๊อคมีครบทุกทรีทเมนต์ จึงเป็นแบบบล๊อคสมบูรณ์ (Complete block)
- แต่ละทรีทเมนต์ ปรากฏเพียง 1 ครั้ง

แผนแบบการทดลองจตุรัสละติน

- ตัวอย่างแผนแบบ LS

3 × 3

A	B	C
B	C	A
C	A	B

4 × 4

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

5 × 5

A	B	C	D	E
B	C	D	E	A
C	D	E	A	B
D	E	A	B	C
E	A	B	C	D

- แผนแบบ LS ใช้ได้ดีกรณีที่ไม่มี Interaction (อิทธิพลร่วม) ระหว่างแถว และสดมภ์ และทรีทเมนต์

ข้อดีและข้อเสียของแผนแบบ LS

- ข้อดี
  - การควบคุมความผันแปรสองทาง ช่วยให้ความคลาดเคลื่อนลดลง
  - การวิเคราะห์ทางสถิติทำได้ง่าย
  - หากมีข้อมูลสูญหาย สามารถประมาณขึ้นมาได้ง่าย
- ข้อเสีย
  - จำกัดจำนวนระดับทรีทเมนต์ แถวและจำนวนสดมภ์
  - กรณีที่แผนแบบ LS มีขนาดเล็ก องศาอิสระของความคลาดเคลื่อนของการทดลองมีค่าน้อย

ขั้นตอนการสุ่มในแผนแบบ LS

- สุ่มเลือกแผนแบบมาตรฐาน เช่น สุ่มแผนแบบ LS ขนาด 4×4 โดยให้หมายเลขในแนวแถว เรียงจาก 1 ถึง 4 และในแนวสดมภ์เรียงจาก 1 ถึง 4 เช่นเดียวกัน

แถว \ สดมภ์	1	2	3	4
1	A	B	C	D
2	B	C	D	A
3	C	D	A	B
4	D	A	B	C

ขั้นตอนการสุ่มในแผนแบบ LS

- ทำสลาก 4 ใบ ให้หมายเลขใบที่ 1-4 เป็นเลข 1 2 3 และ 4
- จับสลากสำหรับแถวโดยไม่ใส่กลับคืน สมมติจับสลากได้หมายเลข 3 2 1 4 นำมาจัดเรียงใหม่ให้อยู่ในแถวที่ 1 2 3 4

มาตรฐาน

	1	2	3	4
1	A	B	C	D
2	B	C	D	A
3	C	D	A	B
4	D	A	B	C

แผนแบบการทดลอง

แถว	1	2	3	4
3				
2				
1				
4				

ขั้นตอนการสุ่มในแผนแบบ LS

- จับสลากสำหรับสดมภ์โดยไม่ใส่กลับคืน สมมติจับสลากได้หมายเลข 2 4 3 1
- นำสดมภ์ที่ 2 4 3 1 มาจัดเรียงใหม่ให้อยู่ในสดมภ์ที่ 1 2 3 4

แผนแบบการทดลอง

	1	2	3	4
3	C	D	A	B
2	B	C	D	A
1	A	B	C	D
4	D	A	B	C

แผนแบบการทดลอง

แถว	2	4	3	1
3				
2				
1				
4				

ขั้นตอนการสุ่มในแผนแบบ LS

- สุ่มทรีทเมนต์ให้แก่อักษร A B C D โดยการจับสลากแบบไม่ใส่กลับคืน สมมติสุ่มตัวเลขได้ 3 2 4 1 นั่นคือ

A = 3, B = 2, C = 4, D = 1

D (1)	B (2)	A (3)	C (4)
C (4)	A (3)	D (1)	B (2)
B (2)	D (1)	C (4)	A (3)
A (3)	C (4)	B (2)	D (1)

ตัวแบบเชิงเส้นของแผนแบบ LS

- ตัวแบบเชิงเส้นของแผนแบบ LS คือ

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijk}$$

y_{ijk} คือ ค่าสังเกตในแถวที่ i สดมภ์ที่ j ของทรีทเมนท์ที่ k

μ คือ ค่าเฉลี่ยรวม

α_i คือ อิทธิพลของแถวที่ i

β_j คือ อิทธิพลของสดมภ์ที่ j

γ_k คือ อิทธิพลของทรีทเมนท์ที่ k

ε_{ijk} คือ ความคลาดเคลื่อนในแถวที่ i สดมภ์ที่ j ของทรีทเมนท์ที่ k

ข้อกำหนดเบื้องต้นของแผนแบบ LS

- ข้อกำหนดเบื้องต้นของแผนแบบ LS คือ

$$\sum_i \alpha_i = 0$$

$$\sum_j \beta_j = 0$$

$$\sum_j \gamma_j = 0$$

$$\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$$

การคำนวณความผันแปรในแผนแบบ LS

- ความผันแปรสามารถเขียนในรูปสมการ คือ

$SS_{total} = SS_{trt} + SS_{row} + SS_{column} + SS_{error}$

SS_{total} คือ ความผันแปรของค่าสังเกตทั้งหมด

SS_{trt} คือ ความผันแปรระหว่างทรีทเมนต์

SS_{row} คือ ความผันแปรระหว่างบล็อกทางแถว

SS_{column} คือ ความผันแปรระหว่างบล็อกทางสดมภ์

SS_{error} คือ ความผันแปรของการทดลอง

ลักษณะข้อมูลในแผนแบบ LS

$y_{11}(t_1)$	$y_{12}(t_2)$	$y_{13}(t_4)$	$y_{14}(t_5)$	$y_{15}(t_3)$	$\bar{y}_{1\bullet}$
$y_{21}(t_4)$	$y_{22}(t_3)$	$y_{23}(t_5)$	$y_{24}(t_1)$	$y_{25}(t_2)$	$\bar{y}_{2\bullet}$
$y_{31}(t_5)$	$y_{32}(t_1)$	$y_{33}(t_2)$	$y_{34}(t_3)$	$y_{35}(t_4)$	$\bar{y}_{3\bullet}$
$y_{41}(t_3)$	$y_{42}(t_4)$	$y_{43}(t_1)$	$y_{44}(t_2)$	$y_{45}(t_5)$	$\bar{y}_{4\bullet}$
$y_{51}(t_2)$	$y_{52}(t_5)$	$y_{53}(t_3)$	$y_{54}(t_4)$	$y_{55}(t_1)$	$\bar{y}_{5\bullet}$
$\bar{y}_{\bullet 1}$	$\bar{y}_{\bullet 2}$	$\bar{y}_{\bullet 3}$	$\bar{y}_{\bullet 4}$	$\bar{y}_{\bullet 5}$	$\bar{y}_{\bullet\bullet}$

$$T_{\bullet\bullet}^2 = (y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{21} + y_{22} + \ldots + y_{55})^2$$

การคำนวณผลรวมกำลังสอง

- สูตรในการคำนวณผลรวมกำลังสอง เป็นดังนี้

$$SS_{total} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{a}(y_{ij(k)} - \bar{y}_{..})^2 \qquad SS_{column} = a\sum_{j=1}^{a}(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{a}y_{ij(k)}^2 - \frac{T_{..}^2}{a\times a} \qquad = \sum_{j=1}^{a}\frac{T_{.j}^2}{a} - \frac{T_{..}^2}{a\times a}$$

$$SS_{row} = a\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \qquad SS_{trt} = a\sum_{k=1}^{a}(\bar{y}_{k} - \bar{y}_{..})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\frac{T_{i.}^2}{a} - \frac{T_{..}^2}{a\times a} \qquad = \sum_{k=1}^{a}\frac{T_{k}^2}{a} - \frac{T_{..}^2}{a\times a}$$

$$SS_{error} = SS_{total} - SS_{trt} - SS_{row} - SS_{column}$$

การประมาณค่า

- การประมาณค่า

$\bar{y}_{..}$	ค่าประมาณแบบจุดของ μ
$\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}$	ค่าประมาณแบบจุดของ α
$\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$	ค่าประมาณแบบจุดของ β
$\bar{y}_{k} - \bar{y}_{..}$	ค่าประมาณแบบจุดของ γ

การตั้งสมมติฐาน

- การตั้งสมมติฐาน

1) ทรีทเม้นต์

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = ... = \mu_a$

H_1: มีค่าเฉลี่ยอย่างน้อย 2 ทรีทเมนต์แตกต่างกัน

2) แถว

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = ... = \mu_a$

H_1: มีค่าเฉลี่ยอย่างน้อย 2 ระดับทางแถวแตกต่างกัน

การตั้งสมมติฐาน

3) คอลัมน์

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = ... = \mu_a$

H_1: มีค่าเฉลี่ยอย่างน้อย 2 ระดับของคอลัมน์แตกต่างกัน

ตารางการวิเคราะห์ความแปรปรวน

- ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน (Source of variation)

SOV	SS	df	MS	F
Treatment	SS_{trt}	$a-1$	$MS_{trt}=\frac{SS_{trt}}{a-1}$	$F_1=\frac{MS_{trt}}{MS_{error}}$
Row	SS_{row}	$a-1$	$MS_{row}=\frac{SS_{row}}{a-1}$	$F_2=\frac{MS_{row}}{MS_{error}}$
Column	SS_{column}	$a-1$	$MS_{column}=\frac{SS_{column}}{a-1}$	$F_3=\frac{MS_{column}}{MS_{error}}$
Error	SS_{error}	$(a-1)(a-2)$	$MS_{error}=\frac{SS_{error}}{(a-1)(a-2)}$	
Total	SS_{total}	a^2-1		

การตัดสินใจ

- เกณฑ์การตัดสินใจในการปฏิเสธหรือไม่ปฏิเสธสมมติฐานหลัก

1) ปฏิเสธสมมติฐานหลัก

เมื่อ $F_{คำนวณ} \geq F_{\alpha(v1,v2)}$

โดย $v_1 = a-1$

$v_2 = (a-1)(a-2)$

2) ไม่ปฏิเสธสมมติฐานหลัก

เมื่อ $F_{คำนวณ} < F_{\alpha(v1,v2)}$

ตัวอย่าง

- การศึกษาผลของระดับโปรตีนในสูตรอาหารผสมสำเร็จรูปสำหรับโคนม ต่อปริมาณโปรตีนในน้ำนมของโคริดนม วางแผนการทดลองแบบ 4 ×4 จัตุรัสลาติน (โคจำนวน 4 ตัว กำหนดช่วงทดลอง 4 ช่วง ห่างกันช่วงละ 3 อาทิตย์) โดยที่โคนมจำนวน 4 ตัว ทุกตัวได้รับอาหารสูตรอาหารผสมสำเร็จรูปที่มีโปรตีน 12, 14, 16 และ 18 เปอร์เซ็นต์ ตามลำดับ จากนั้นรีดน้ำนมและวัดระดับเปอร์เซนต์โปรตีนในน้ำนม ผลการวัดปริมาณในน้ำนมเป็นดังตาราง

- ตารางแสดงผลการทดลอง

โคตัวที่	ช่วงการทดลอง			
	1	2	3	4
1	3.0 (A)	3.2 (B)	3.6 (D)	3.5 (C)
2	3.4 (C)	3.7 (D)	3.1 (A)	3.3 (B)
3	3.6 (D)	3.3 (C)	3.4 (B)	3.2 (A)
4	3.3 (B)	3.2 (A)	3.4 (C)	3.8 (D)

- การตั้งสมมติฐาน

1) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

   H_1: มีค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์อย่างน้อย 1 คู่ แตกต่างกัน

2) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

   H_1: มีค่าเฉลี่ยของบล็อกทางแถวอย่างน้อย 1 คู่ แตกต่างกัน

3) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = ... \mu_4$

   H_1: มีค่าเฉลี่ยของบล็อกทางสดมภ์อย่างน้อย 1 คู่ แตกต่างกัน

โคตัวที่	ช่วงการทดลอง				ผลรวม	ค่าเฉลี่ย
	1	2	3	4		
1	3.0 (A)	3.2 (B)	3.6 (D)	3.5 (C)	$T_{1.}$=13.3	$\bar{y}_{1\bullet}$ = 3.3
2	3.4 (C)	3.7 (D)	3.1 (A)	3.3 (B)	$T_{2.}$=13.5	$\bar{y}_{2\bullet}$ = 3.4
3	3.6 (D)	3.3 (C)	3.4 (B)	3.2 (A)	$T_{3.}$=13.5	$\bar{y}_{3\bullet}$ = 3.4
4	3.3 (B)	3.2 (A)	3.4 (C)	3.8 (D)	$T_{4.}$=13.7	$\bar{y}_{4\bullet}$ = 3.4
ผลรวม	$T_{.1}$=13.3	$T_{.2}$=13.4	$T_{.3}$=13.5	$T_{.4}$=13.8	$T_{..}$ = 54	$T_{..}^2$ = 2916
ค่าเฉลี่ย	$\bar{y}_{\bullet 1}$ = 3.3	$\bar{y}_{\bullet 2}$ = 3.4	$\bar{y}_{\bullet 3}$ = 3.4	$\bar{y}_{\bullet 4}$ = 3.5	$CT = \frac{T_{..}^2}{t \times t} = \frac{54^2}{4 \times 4} = 182.25$	
ทรีทเมนต์	A	B	C	D		
ผลรวม	T_1=12.5	T_2=13.2	T_3=13.6	T_4=14.7		
ค่าเฉลี่ย	$\bar{y}_1$ = 3.1	$\bar{y}_2$ = 3.3	$\bar{y}_3$ = 3.4	$\bar{y}_4$ = 3.7	$\bar{y}_{...}$ = 3.4	

$$SS_{total} = \sum_{i=1}^{a} y_{ij(k)}^2 - CT$$

$$= (3.0^2 + 3.2^2 + 3.6^2 + 3.5^2 + ... + 3.8^2) - 182.25$$

$$= 182.98 - 182.25 = 0.73$$

$$SS_{trt} = \sum_{k=1}^{a} \frac{T_k^2}{a} - \frac{T_{..}^2}{a \times a}$$

$$= \frac{12.5^2}{4} + \frac{13.2^2}{4} + \frac{13.6^2}{4} + \frac{14.7^2}{4} - 182.25$$

$$= 182.885 - 182.25 = 0.635$$

$$SS_{row} = \sum_{i=1}^{a} \frac{T_{i.}^2}{a} - CT$$

$$= \frac{13.3^2}{4} + \frac{13.5^2}{4} + \frac{13.5^2}{4} + \frac{13.7^2}{4} - 182.25$$

$$= 182.27 - 182.25 = 0.02$$

$$SS_{column} = \sum_{j=1}^{a} \frac{T_{.j}^2}{a} - CT$$

$$= \frac{13.3^2}{4} + \frac{13.4^2}{4} + \frac{13.5^2}{4} + \frac{13.8^2}{4} - 182.25$$

$$= 182.285 - 182.25 = 0.035$$

$SS_{error} = SS_{total} - SS_{trt} - SS_{row} - Ss_{column}$

$= 0.73 - 0.635 - 0.02 - 0.035$

$= 0.04$

- ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน (Source of variation)

SOV	SS	df	MS	F
Treatment	0.64	3	$MS_{trt} = \frac{0.635}{3} = 0.21$	$F_1 = \frac{0.21}{0.007} = 30.0$
Row	0.02	3	$MS_{row} = \frac{0.02}{3} = 0.007$	$F_2 = \frac{0.007}{0.007} = 1.0$
Column	0.04	3	$MS_{column} = \frac{0.035}{3} 0.01$	$F_3 = \frac{0.01}{0.007} = 1.43$
Error	0.03	6	$MS_{error} = \frac{0.04}{6} = 0.007$	
Total	0.73			

- เกณฑ์การตัดสินใจ กำหนด $\alpha = 0.05$

ปฏิเสธสมมติฐานหลัก เมื่อ

$F_{คำนวณ} \geq F_{\alpha(v1,v2)}$ เมื่อ $v_1 = 4 - 1$ และ $v_2 = (4 - 1)(4 - 2)$

1) ทรีทเมนต์

$30 > 4.76$ ปฏิเสธ H_0

2) บล็อกทางแถว

$1.00 < 4.76$ ไม่ปฏิเสธ H_0

3) บล็อกทางสดมภ์

$1.43 < 4.76$ ไม่ปฏิเสธ H_0

ตารางค่า $F_{\alpha(v1,v2)}$ ณ ระดับนัยสำคัญที่ 0.05

v_2	v_1						
	1	2	3	4	5	6	7
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79

- สรุปผล

1) มีค่าเฉลี่ยของปริมาณโปรตีนในน้ำนมของโครีดนมที่เลี้ยงด้วยอาหารผสมสำเร็จรูปที่มีโปรตีนอย่างน้อย 2 ระดับแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

2) ไม่พบความแตกต่างทางสถิติของค่าเฉลี่ยของบล็อกทางแถว

3) ไม่พบความแตกต่างทางสถิติของค่าเฉลี่ยของบล็อกทางสดมภ์

แบบฝึกหัด

- การศึกษาการใช้กากเนื้อในเมล็ดปาล์มเป็นแหล่งโปรตีนในสูตรอาหารสำหรับโครีดนมแทนการใช้กากถั่วเหลือง 3 ระดับคือ 0 50 และ 100 เปอร์เซ็นต์ วางแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์ขนาด 3 × 3 โดยมีโครีดนมจำนวน 6 ตัว กำหนดช่วงทดลอง 3 ช่วง แต่ละช่วงห่างกัน 30 วัน โคทุกตัวได้รับอาหารสูตรอาหารทั้ง 3 สูตร จากนั้นรีดน้ำนมและวัดระดับเปอร์เซนต์โปรตีนในน้ำนม ผลการวัดปริมาณในน้ำนมเป็นดังตาราง

แบบฝึกหัด

โคตัวที่	ช่วงทดลอง		
	1	2	3
1	2.9 (A)	3.3 (B)	3.2 (C)
2	3.2 (B)	3.2 (C)	3.1 (A)
3	3.1 (C)	3.0 (A)	3.1 (B)